



ANALISIS KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA DALAM MATA KULIAH TEORI BILANGAN (Teori Keterbagian dalam bilangan Bulat)

¹Firma Yudha, ²Robisha Zarifa Ribaah

^{1,2}Institut Agama Islam Ibrahimy Genteng Banyuwangi, Jl. KH. Hasyim Asy'ari No.1, Dusun Krajan,
Kembiritan, Kec. Genteng, Kabupaten Banyuwangi, Jawa Timur 68465. Telp: (0333) 845654
e-mail: firmayudha123@gmail.com

Abstrak

Pembelajaran matematika khususnya teori bilangan jenjang perguruan tinggi, menjadi tantangan awal bagi mahasiswa dalam menyelesaikan masalah. Beberapa kali pertemuan mencoba untuk penyelesaian masalah, namun tidak selalu berhasil. Namun dengan berulang-ulang percobaan dalam penyelesaian masalah (pebuktian) suatu teorema, mahasiswa memahami dan mengerti. Inti dari pada persoalan ini adalah mahasiswa harus teliti, fokus dan faham dengan apa yang disampaikan pemateri dan memahami buku panduan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Instrumen dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan soal tes tentang teori keterbagian dalam bilangan bulat mata kuliah teori bilangan yang kemudian teknik analisis data dilakukan dengan melihat hasil pembuktian mahasiswa dengan menyesuaikan soal dan indikator. Jumlah sampel dalam penelitian adalah 10 mahasiswa program studi Pendidikan matematika. Hasil dari penelitian ini adalah terdapat 10% saja yang kurang maksimal. Untuk 90% mahasiswa sudah mampu menyelesaikan masalah dengan baik. Ini artinya mahasiswa mampu menyelesaikan pembuktian soal matematis pada mata kuliah teori bilangan khususnya Teori keterbagian dalam bilangan bulat. Artinya keberhasilan dalam pembelajaran sangat terlihat dari hasil jawaban mahasiswa.

Kata Kunci: kemampuan, pembuktian matematis, teori bilangan, teori keterbagian dalam bilangan bulat

Abstract

Learning mathematics, especially number theory at the college level, becomes an initial challenge for students in solving problems. Several meetings attempted to solve the problem, but they were not always successful. However, with repeated attempts at solving problems (proofs) of a theorem, students understand and comprehend. The essence of this issue is that students must be meticulous, focused, and understand what the speaker conveys and comprehend the guidebook. The method used in this research is descriptive qualitative. The instrument in this study is the use of test questions about divisibility theory in integers from the number theory course, followed by data analysis techniques that involve examining students' proofs by adjusting the questions and indicators. The sample size in the study is 10 students from the Mathematics Education program. The result of this research is that only 10% are not performing optimally. For 90% of the students, they are already able to solve problems well. This means that students are able to solve mathematical proof problems in the number theory course, specifically in the theory of divisibility in integers. This means that success in learning is very evident from the students' answers.

Keywords: *ability, mathematical proof, number theory, divisibility theory in integers*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan suatu ilmu tentang logika yang berhubungan dengan penalaran. Matematika merupakan dasar dari ilmu pengetahuan (A. C. Lestari et al., 2020). Menurut Putri (dalam Ramadhan, 2022) Matematika dapat pula dijadikan sarana agar setiap orang bisa mengembangkan kemampuan berpikirnya. Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir dan



beragumentasi, memberikan kontribusi dalam penyelesaian masalah sehari-hari dan dalam dunia kerja, serta memberikan dukungan dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (Eva et al., 2024). Menurut Hasratudin matematika adalah cara untuk menemukan jawaban atas masalah yang dihadapi manusia, cara menggunakan informasi, menggunakan pengetahuan tentang bentuk dan ukuran, menggunakan pengetahuan menghitung, dan yang paling penting berpikir untuk diri kita sendiri dalam melihat dan menggunakan hubungan (Afsari et al., 2021). Matematika sebagai ilmu pengetahuan dengan penalaran deduktif mengandalkan logika dalam meyakinkan akan kebenaran suatu pernyataan (Hernadi, 2013). Dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan matematika perlu menggunakan penalaran dan imajinasi terutama dengan pembuktian untuk mendapatkan suatu kebenaran. Menurut Roida (2023) Dalam pembelajaran matematika setiap dosen harus mampu menanamkan penalaran matematika dengan baik agar mahasiswa dapat membangun daya nalarnya dengan baik, oleh karena itu untuk dapat menanamkan penalaran matematika maka penting bagi siswa untuk memiliki kemampuan pembuktian matematis di dalam matematika. Kemampuan pembuktian matematis penting untuk mempersiapkan siswa agar mampu menggunakan pola pikir matematis dalam kehidupan sehari-hari dan dalam karier masa depan (Wahyuni et al., 2023).

Bukti pada matematika adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. kemampuan pembuktian matematis merupakan kumpulan argumen yang dibuat secara logis sesuai aturan dengan tujuan menunjukkan kebenaran sebuah pernyataan (Kartini & Suanto, 2016). Menurut Lestari & Yudhanegara (2019) kemampuan pembuktian matematis adalah kemampuan memahami pernyataan atau simbol matematika serta memberikan alasan/bukti terhadap kebenaran solusi. Kemampuan pembuktian matematis adalah salah satu kemampuan yang penting dimiliki oleh peserta didik agar mampu untuk berpikir logis dan sistematis. Menurut Knuth dalam Hodiyanoto (2018) alasan mengapa pembuktian matematika penting untuk dilakukan, diantaranya: untuk memverifikasi bahwa pernyataan itu benar, untuk menjelaskan mengapa pernyataan itu benar, untuk mengomunikasikan pengetahuan matematika, untuk menemukan atau membuat matematika baru, atau untuk mensistematisasi pernyataan ke dalam sistem aksiomatik.

Seorang peserta didik dapat dikatakan mampu memiliki kemampuan pembuktian matematis jika dapat memenuhi indikator pembuktian matematis diantaranya adalah Lestari (dalam Siallagan et al., 2021) menyatakan tiga indikator dalam kemampuan pembuktian matematis yakni memahami bukti matematis, mengkonstruksi bukti matematis, baik secara



langsung, tidak langsung atau induksi matematika serta mengevaluasi bukti dengan menambahkan, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis. Selain itu Indikator untuk kemampuan pembuktian matematis secara juga diungkapkan oleh NCTM antara lain: 1) mengenal keduanya sebagai aspek mendasar pada matematika, 2) membuat serta memeriksa konjektur matematika, 3) mengelaborasi serta mengecek argumen ataupun bukti *proof* dalam matematika, dan 4) memilih serta menerapkan semua jenis penalaran dan metode pembuktian (Dewi & Dasari, 2023). Pendidikan matematika juga dapat digunakan dalam mempersiapkan peserta didik sebagai calon insan cendekia dan tenaga kerja terdidik dalam era MEA yaitu nilai-nilai atau karakter yang perlu dikembangkan berkaitan dengan matematika (Waluyo, 2012. Dalam Yudha, 2019).

Mata kuliah teori bilangan termasuk dalam kategori mata kuliah yang dinilai sangat sulit bagi mahasiswa pendidikan matematika. Dalam mata kuliah teori bilangan terdapat beberapa permasalahan terkait pembuktian yang memerlukan kemampuan pembuktian matematis untuk dapat menyelesaikannya. Teori bilangan adalah cabang dari matematika di mana yang dipelajari adalah sifat dan hubungan antara beberapa tipe bilangan (Karim & Nurrahmah, 2018). Menurut Hasan (2022) teori bilangan merupakan cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat, hubungan, dan jenis-jenis bagian dari bilangan. Mata Kuliah Teori bilangan adalah cabang ilmu matematika murni yang mempelajari bilangan, sifat-sifat bilangan, keterkaitan antara sejumlah bilangan, terutama yang berhubungan dengan bilangan bulat yaitu aritmatika jam, aritmatika modulo, bilangan basis, kongruensi, aplikasi kongruen, notasi sigma, notasi phi dan koefisien binomial (Hartati, 2020). Setelah menempuh mata kuliah teori bilangan, mahasiswa diharapkan dapat meningkatkan kemampuan bereksplorasi, berargumentasi, melakukan koneksi, berkomunikasi dan kemampuan problem solving melalui pemahaman konsep teori bilangan. Akan tetapi masih terdapat permasalahan dalam pembelajaran teori bilangan, yaitu terkait pembuktian matematis.

Rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa menyebabkan hambatan dalam proses pembelajaran, sebagaimana dalam penelitian Arfatin (2018) yang mengungkapkan bahwa mahasiswa masih kesulitan melakukan pembuktian matematis pada mata kuliah teori bilangan diantaranya adalah 1) kurangnya pemahaman siswa terhadap konsep yang akan dibuktikan, mereka masih mengalami kesulitan dalam mengidentifikasi apa yang diketahui, apa yang akan dibuktikan; (2) kekurangan pemahaman tentang metode-metode pembuktian yang akan digunakan; (3) kurangnya kemampuan dalam menggunakan maupun memanipulasi fakta-fakta yang diketahui dan mengkaitkannya dengan yang akan



ditunjukkan serta; (4) kurangnya kemampuan dalam menyusun alur/sistematika bukti tersebut. Selain itu pada mata kuliah lain seperti analisis rill mahasiswa juga mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian matematis (Perbowo & Pradipta, 2017). Hal ini diperkuat dengan studi pendahuluan yang telah dilaksanakan pada salah satu sekolah menengah pertama (SMP) dimana hasilnya menunjukkan bahwa dalam satu kelas hanya terdapat 3% siswa yang dapat melakukan pembuktian dengan tepat dan benar. Artinya, suatu kemampuan pembuktian matematis yang dimiliki oleh siswa tergolong rendah (Azizah et al., 2020). Dari beberapa pendahulu penelitian yang sudah dilakukan maka perlu untuk diketahui apa penyebab dari rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa.

Melihat rendahnya kemampuan pembuktian matematis mahasiswa, maka perlu dianalisis terkait kemampuan pembuktian matematisnya. Oleh karena itu sangat penting untuk diketahui hal hal yang menyebabkan mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian matematis. Dari permasalahan diatas peneliti akan melakukan penelitian tentang analisis kemampuan pembuktian matematis pada mata kuliah teori bilangan pada materi teori keterbagian dalam bilangan bulat.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilaksanakan di Institut Agama Islam Ibrahimy Genteng Banyuwangi, yaitu dengan subjek penelitian adalah mahasiswa prodi Pendidikan matematika Semester 3 tahun akademik 2023 2024 dengan jumlah 10 mahasiswa. Metode dalam penelitian adalah deskriptif kualitatif, yaitu untuk membuat deskripsi yang akurat yang sesuai dengan gambaran kemampuan matematis mahasiswa pada mata kuliah teori bilangan khususnya pada mahasiswa semester 3 tahun akademik 2023/2024. Sehingga dalam penelitian ini akan diungkapkan pembuktian kemampuan matematis mahasiswa mata kuliah teori bilangan. Instrumen dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan soal tes tentang teori keterbagian dalam bilangan bulat mata kuliah teori bilangan yang kemudian teknik analisis data dilakukan dengan melihat hasil pembuktian mahasiswa dengan menyesuaikan soal dan indikator. Soal dan jawaban tes diperiksa apakah pengerjaan mahasiswa sudah benar dan juga sesuai dengan indikator yang ada. Indikator Pembuktian Matematis ditampilkan pada Tabel 1 berikut!

Tabel 1. Indikator Kemampuan Pembuktian Matematis

Indikator	Butir Soal
memahami pernyataan atau symbol matematika serta menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema.	Tunjukkan bahwa kuadrat dari sembarang bilangan bulat dapat dinyatakan dalam $2k$ atau $2k + 4$

Sumber : Lestari (2015) dengan modifikasi

Hasil yang kemudian dihitung persentase dari masing masing analisis. Berikut rumus persentase menurut Sudjana dan Ibrahim (Nurrahmah & Karim, 2018):

$$P = \frac{F}{N} \times 100\%$$

Keterangan

P = Nilai Persen

F = Jumlah Skor yang diperoleh

N = Jumlah Skor Maksimal

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil analisis pembuktian matematis mahasiswa dapat dilihat pada diagram berikut



Diagram 1. Persentase kemampuan pembuktian matematis mahasiswa pada matakuliah teori bilangan

Terbukti dari gambar diagram diatas bahwa terdapat 90% mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan matematis secara individu yang dapat dilihat dari hasil jawaban mahasiswa pada lembar jawaban, dan terdapat 10% mahasiswa yang kurang lengkap dalam penyelesaiannya. Dari jumlah 10 mahasiswa yang diuji, maka aertinya terdapat 9 mahasiswa yang sudah mampu mengerjakan secara individu dengan hasil yang baik, dan terdapat 1 mahasiswa yang kurang maksimal dalam penyelesaian masalah pada soal. Tidak dapat

dipungkiri bahwa menyelesaikan soal matematis berbeda dengan menyelesaikan persoalan yang lain, dikarenakan dalam pembelajaran matematika yang dapat diselesaikan adalah berupa angka dan simbol-simbol matematika yang mana dalam proses pengerjaannya membutuhkan sebuah ketelitian dan fokus yang maksimal. Dimana ketika penyelesaian matematis terjadi kesalahan satu angka saja maka akan fatal akibatnya. Maka dari itu dalam menyelesaikan masalah matematis dibutuhkan pemahaman yang baik, ketelitian dan fokus. Selain itu dalam menyelesaikan persoalan matematis mahasiswa akan sangat mudah menyelesaikan masalahnya jika ada panduan yang mudah dipahami, cara penjelasan sebelumnya yang mudah dipahami dan teorema yang jelas dan mampu dipahami.

Hasil pembelajaran yang dilaksanakan di kelas, khususnya program studi matematika pada matakuliah teori bilangan Teori keterbagian dalam bilangan bulat, didapatkan hasil yang mendekati sempurna, yang mana mahasiswa mempelajari Teorema 2.2 Teorema Akibat (Corollary). Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka terdapat tepat satu bilangan bulat q dan tepat satu bilangan bulat r demikian sehingga: $a = qb + r$, untuk $0 \leq r < |b|$. Soal yang diberikan adalah Tunjukkan bahwa kuadrat dari sembarang bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $2k$ atau $2k + 4$. Berikut hasil penyelesaian mahasiswa:

nama : FIDA NUR IZBA
nim : 2021339300016

Belum dibuktikan

→ Dalam bentuk $2k$ atau $2k + 4$

→ jika $n = 2k + 4$

$$\begin{aligned} &= (2k + 4)^2 \\ &= (4k^2 + 16k + 16) \\ &= 2(2k^2 + 8k + 6) + 4 \\ &= 2k + 4 \end{aligned}$$

dengan $k = 2k^2 + 8k + 6$

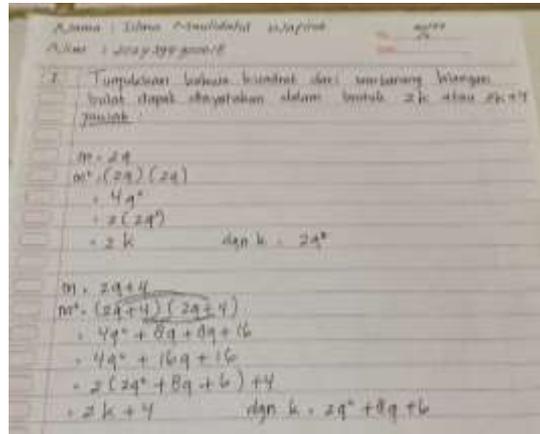
Gambar 1. Jawaban mahasiswa 1

Untuk $2k$ belum dibuktikan, Mahasiswa terburu-buru hingga yang dibuktikan hanyalah $2k + 4$ saja.

Kebiasaan yang kurang baik adalah kebiasaan kurang teliti dalam mengerjakan sebuah permasalahan. Padahal jika dalam menyelesaikan masalah dilaksanakan dengan hati yang tenang, dan pengetahuan atau cara pemahaman yang cukup, maka dalam situasi apapun

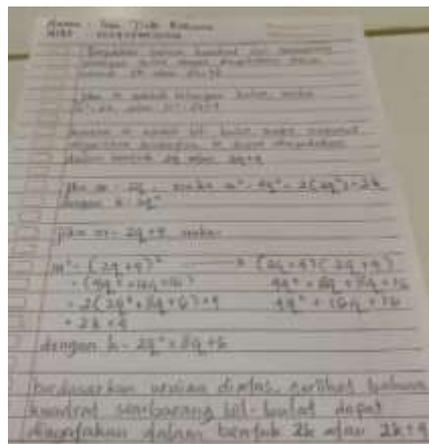


dan bagaimanapun mahasiswa akan mampu menyelesaikan maslaahnya dengan baik. Selain jawaban yang kurang tepat diatas, berikut hasil jawaban mahasiswa lainnya yang sesuai dengan penyelesaian yang sebenarnya, berikut dibawah ini:

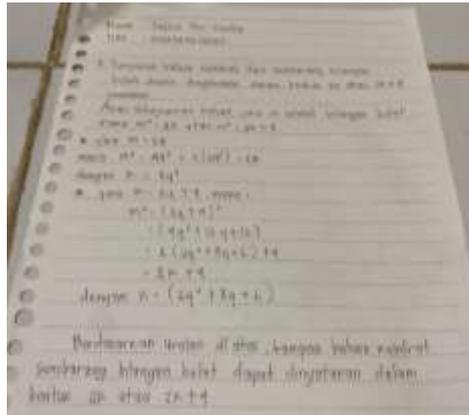


Gambar 2. Jawaban mahasiswa 2

Jawaban mahasiswa yang sangat jelas dan singkat tanpa ada penjelasan lagi, namun tidak ada kesalahan dalam penyelesaian masalahnya. Haal demikian tidak menjadi permasalahan, namun supaya memudahkan pembaca dalam membaca hasil penyelesaiannya, harus ditambahkan dengan keterangan yang jelas supaya tidak menimbulkan penilaian yang berbeda. Berikut dibawah ini Jawaban mahasiswa yang sesuai dengan teorema dan sesuai cara penyelesaian secara jelas.



Gambar 3. Jawaban mahasiswa 3



Gambar 4. Jawaban mahasiswa 4

Lembar jawaban diatas adalah bukti bahwa mahasiswa benar-benar memahami apa yang sudah dipelajari sebelumnya. Adapun indikator kemampuan pembuktian matematis yang diukur adalah memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema. Berdasarkan indikator tersebut, didapatkan hasil penelitian sebagai berikut: Hasil menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian matematis dapat pada indikator memahami pernyataan atau simbol matematika serta dapat menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema, didapatkan sebesar 90% mahasiswa yang mampu menyelesaikan sesuai teorema. Dan selebhnya hanya 1 yang kurang maksimal.

SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa mahasiswa akan sangat mudah menyelesaikan masalahnya jika ada panduan yang mudah dipahami, cara penjelasan sebeumnya yang mudah dipahami dan teorema yang jelas dan mampu dipahami. Selain itu jika permasalahan diselesaikan dengan cara teliti, fokus dan faham maka akan secara mudah diselesaikan dengan baik. Dapat dilihat dari hasil pekerjaan mahasiswa diatas bahwa terdapat 10% saja yang kurang maksimal. Untuk 90% mahasiswa sudah mampu menyelesaikan masalah dengan baik. Ini artinya mahasiswa mampu menyelesaikan pembuktian soal matematis pada mata kuliah teori bilangan khususnya Teori keterbagian dalam bilangan bulat.

DAFTAR PUSTAKA



- Afsari, S., Safitri, I., Harahap, S. K., & Munthe, L. S. (2021). Systematic Literature Review: Efektivitas Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik Pada Pembelajaran Matematika. *Indonesian Journal of Intellectual Publication*, 1(3). <https://doi.org/10.51577/ijipublication.v1i3.117>
- Azizah, U., Mutaqin, A., & Rafianti, I. (2020). PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN MEANS ENDS ANALYSIS (MEA) TERHADAP KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS DAN SELF-EFFICACY SISWA. *TIRTAMATH: Jurnal Penelitian Dan Pengajaran Matematika*, 2(1). <https://doi.org/10.48181/tirtamath.v2i1.8321>
- Dewi, N. S., & Dasari, D. (2023). Systematic Literature Review: Kemampuan Pembuktian Matematis. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1). <https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i1.1987>
- Eva, R., Siagian, F., Anawati, S., & Werdiningsih, C. E. (2024). *PENGARUH SELF EFFICACY TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA SISWA*.
- Hartati, L. (2020). Analisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal pada mata kuliah teori bilangan. *Prosiding SINASIS (Seminar Nasional Sains)*, 1(1).
- Hasan, M. N., Nuroniyah, A., & Anis Silwatud Diyana. (2022). Implementasi Etnomatematika Berbasis Alquran Sebagai Rujukan Pembelajaran Teori Bilangan. *Al Furqan: Jurnal Ilmu Al Quran Dan Tafsir*, 5(1). <https://doi.org/10.58518/alfurqon.v5i1.1787>
- Hernadi, J. (2013). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1). <https://doi.org/10.22342/jpm.2.1.295>.
- Hodiyanto, H., & Susiaty, U. D. (2018). Peningkatan kemampuan pembuktian matematis melalui model pembelajaran problem posing. *MaPan: Jurnal Matematika Dan Pembelajaran*, 6(1), 128–137.
- Karim, A., & Nurrahmah, A. (2018). ANALISIS KEMAMPUAN PEMAHAMAN MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH TEORI BILANGAN. *Jurnal Analisa*, 4(1). <https://doi.org/10.15575/ja.v4i1.2101>
- Kartini, & Suanto, E. (2016). ANALISA KESULITAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL. *SEMIRATA 2015 Bidang MIPA BKS-PTN Barat*, 1(1).
- Lestari, A. C., Solehah, A. N. B., Maghfiroh, A. A., Fitriyah, I. A., Septiadi, D. D., & Annizar, A. M. (2020). PENGEMBANGAN SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA



-
- SMA KELAS XI MATERI SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINIER DUA VARIABEL. *ARITMATIKA: Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 1(1), 1–21.
- Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real. *Mendidik: Jurnal Kajian Pendidikan Dan Pengajaran*, 1(2).
- Lestari, K. E., & Yudhanegara, M. R. (2019). *Penelitian pendidikan matematika*.
- Nurrahmah, A., & Karim, A. (2018). Analisis kemampuan pembuktian matematis pada matakuliah teori bilangan. *JURNAL E-DuMath*, 4(2), 21–29.
- Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). PEMETAAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS SEBAGAI PRASYARAT MATA KULIAH ANALISIS REAL MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA. *KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1). <https://doi.org/10.22236/kalamatika.vol2no1.2017pp81-90>
- Ramadhan, F. (2022). Penggunaan strategy Diskursus Multy Representation (DMR) untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika peserta didik. *ARITMATIKA: Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 3(2), 75–88.
- Siagian, R. E. F., & Werdiningsih, C. E. (2023). PENGARUH MODEL STUDENT FACILITATOR AND EXPLANING TERHADAP PENALARAN MATEMATIS MATAKULIAH PENGATAR DASAR MATEMATIKA. *ARITMATIKA: Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 4(2), 117–128.
- Siallagan, F., Sinaga, B., & Rajagukguk, W. (2021). Analisis Kemampuan Penalaran dan Berpikir Kreatif Matematis Siswa Dalam Pembelajaran Penemuan Terbimbing. *Paradikma Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(1), 68–74.
- Wahyuni, I., Rahman, A., & Hartiningwan, E. P. (2023). Analisis Pemahaman Konsep Dasar Matematika Pada Siswa Smp/Mts. *ARITMATIKA: Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 4(2), 129–144.